4/7/2009

#2 page 321 Chapter 3 Review

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{E}(t) = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \end{bmatrix} e^{t}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+2) + 5$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \qquad \lambda = -1, 3$$

$\underline{\lambda = -1}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 3}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{h}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \qquad \vec{h}_2(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Substitute $\vec{p}(t) = c_1(t)\,\vec{h}_1(t) + c_2(t)\,\vec{h}_2(t)$

into $D\vec{x} = A\vec{x} + \vec{E}(t)$

Solve

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & 5e^{3t} & -4e^{t} \\ e^{-t} & e^{3t} & 12e^{t} \end{array}\right] \xrightarrow[②-①]{} \left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & 5e^{3t} & -4e^{t} \\ 0 & -4e^{3t} & 16e^{t} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{① + \frac{5}{4}②} \left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & 0 & 16e^{t} \\ 0 & -4e^{3t} & 16e^{t} \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{4}e^{-3t}\times ②]{e^{t}\times ①} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 16e^{2t} \\ 0 & 1 & -4e^{-2t} \end{array}\right]$$

$$c_1(t) = 8e^{2t} \qquad c_2(t) = 2e^{-2t}$$

$$\vec{p}(t) = \begin{bmatrix} 8e^t \\ 8e^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10e^t \\ 2e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix} e^t \qquad \boxed{\vec{p}(t) = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix} e^t}$$

check

$$D\vec{p}(t) - A\vec{p}(t) = \begin{bmatrix} 18e^t \\ 10e^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (72-50)e^t \\ (18-20)e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4e^t \\ 12e^t \end{bmatrix} \checkmark$$

(a) $\boxed{\vec{x}(t) = c_1\vec{h}_1(t) + c_2\vec{h}_2(t) + \vec{p}(t)}$

$$\vec{x}(0) = c_1\vec{h}_1(0) + c_2\vec{h}_2(0) + \vec{p}(0) \overset{\text{set}}{=} \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -7 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

(b) $\boxed{\vec{x}(t) = -2\vec{h}_1(t) - \vec{h}_2(t) + \vec{p}(t)}$